CALCULUL MODURILOR PROPRII DE VIBRAȚIE ALE PALELOR DE ELICOPTER CU DIVERSE CONDIȚII LA LIMITĂ

de V. GIURGIUȚIU

Întreprinderea de avioane, București

P. KALMUȚCHI

ICSITAv — INCREST, București

Lucrarea de față își propune să prezinte o abordare mai generală a condițiilor la limită cu aplicație la cazul complex al palei neuniforme și torsionate, cu unghi de pas diferit de zero. În acest fel, atît palele de elicopter, cît și cele de elice pot fi rezolvate în mod unitar.

În procesul de analiză aeroelastică a palelor de elicopter, determinarea frecvențelor și modurilor proprii de vibrație ocupă un loc important. Aceste caracteristici, proprii fiecărei pale, constituie elementele de bază ale unei analize aeroelastice care folosește reprezentarea modală ca mijloc de abordare. În cazul palelor de elice și de elicopter dificultatea problemei aflării frecvențelor și modurilor proprii este amplificată de faptul că, datorită prezenței cîmpului centrifugal, complexitatea ecuațiilor diferențiale este atît de mare încît ele nu au soluții analitice nici măcar pentru o pală cu geometrie simplă, cum este de exemplu pala uniformă, pentru care, în cazul staționar, există cunoscutele soluții Krîlov Timoshenko exprimate în funcție de sinusuri și cosinusuri hiperbolice și trigonometrice.

De aceea, găsirea unor metode cît mai eficiente de rezolvare a acestor ecuații constituie și în prezent o preocupare continuă a cercetărilor în domeniu, pînă în prezent fiind propuse diverse metode aproximative (variaționale, modale, element finit, integrarea numerică etc. [1]).

Într-o comunicare anterioară [2] autorul a prezentat o metodă originală de rezolvare a acestor ecuații bazată pe o abordare semianalitică care permite programarea directă pe calculator și obținerea rezultatelor cu mare precizie (limitată practic doar de precizia mașinii de calcul folosite). Utilizînd dezvoltarea soluției în serii de puteri, autorul a definit patru funcții proprii vibrațiilor palelor în rotație, funcții ce joacă același rol cu funcțiile Krîlov/Timoshenko pentru studiile vibrațiilor grinzilor staționare.

În formularea ei originală, metoda semianalitică menționată mai sus — ca și programul de calcul aferent — era folosită pentru aflarea frecvențelor și modurilor proprii [3] ale unei pale neuniforme în rotație avînd unghi de pas zero și condiții la limită tip „încastrat” în butucul de prindere.

Într-o lucrare ulterioară [6] autorul a extins metoda și la pala de elicopter cu condiții la limită tip „articulat” în butuc, cu și fără excentricitate de prindere.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 48, NR. 1, 1989, P. 21—33

Rezultatele teoretice expuse în lucrarea de faţă sînt implementate pe calculator sub forma unor pachete de programe introduse în biblioteca SICPAC a institutului. Aceste programe sînt supuse unei continue actualizări.

MODELUL MATEMATIC

Se consideră ecuaţiile generale de mişcare ale unui element infinitezimal de pală în rotaţie (fig. 1) avînd proprietăţile uniforme pe porţiuni [3], în ipoteza aplicării corecţiilor Timoshenko de forfecare şi inerţie rotaţională :

$$\begin{aligned}
&T' - m\ddot{u} + 2\,m\,\Omega(\dot{v}\cos\theta - \dot{w}\sin\theta) + m\Omega^2 u = -\,m\Omega^2 x\,,\\
&EI_v v_b'''' - (Tv')' + mK_v^2(-\,\ddot{v}_b'' + \Omega^2 v_b'' + 2\,\Omega\varphi'\sin\theta) + m\,\ddot{v} +\\
&\quad + 2\,m\,\Omega\dot{u}\cos\theta - m\Omega^2\cos\theta(v\cos\theta - w\sin\theta) = 0\,,\\
&EI_w w_b'''' - (Tw')' + mK_w^2(-\,\ddot{w}_b'' + \Omega^2 w_b'' + 2\,\Omega\dot{\varphi}'\cos\theta) +\\
&\quad + m\ddot{w} - 2\,m\Omega\dot{u}\sin\theta + m\Omega^2\sin\theta\,(v\cos\theta - w\sin\theta) = 0,\\
&GJ\varphi'' + K_A^2(T\varphi')' - mK^2\ddot{\varphi} + 2m\Omega\,(K_v^2\,\dot{v}_b'\sin\theta + K_w^2\,\dot{w}_b'\cos\theta) -\\
&\quad - m\Omega^2(K_v^2 - K_w^2)\,\varphi\cos 2\theta = -\,\frac{1}{2}\,\Omega^2\,(K_v^2 - K_w^2)\sin 2\theta\,,
\end{aligned} \tag{1}$$

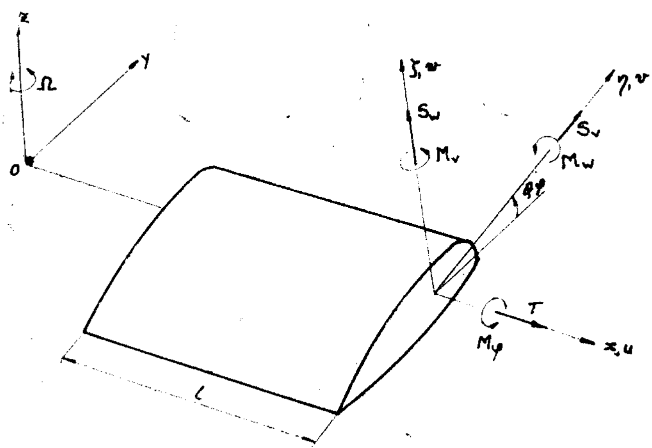

Fig. 1

unde cu b s-a indexat componenta de încovoiere a deplasărilor laterale v şi w.

Neglijînd ca de obicei efectele secundare (vibraţia axială pe direcţia u, efectele Coriolis etc.) rezultă că, în prima aproximaţie, forţa centrifugă nu depinde de mişcarea de vibraţie şi de aceea se poate obţine prin integrarea directă sub forma

$$T(x) = \Omega^2 \int_x^R m x \, \mathrm{d}x.$$

Pentru simplificarea exprimării vom folosi ipoteza vibraţiilor armonice şi vom introduce parametrii adimensionali din tabelul 1 pe care îi înlocuim în ecuaţiile (1) pentru a obţine :

$$v'''' - \alpha_v(\tau v')' - (\lambda_v + \alpha_v \cos^2\theta)\, v + \mu_v(\lambda_v + \alpha_v)\, v_b + (\alpha_v \sin\theta \cos\theta)\, w = 0, \tag{2a}$$

$$w'''' - \alpha_w(\tau w')' - (\lambda_w + \alpha_w \sin^2\theta)\, w + \mu_w(\lambda_w + \alpha_w)\, w_b + (\alpha_w \sin\theta \cos\theta)\, v = 0, \tag{2b}$$

$$\varphi'' + \alpha_\varphi \mu_A (\tau\varphi')' + (\lambda_\varphi \mu)\, \varphi - (\alpha_\varphi \mu_{vw} \cos 2\theta)\, \varphi = 0. \tag{2c}$$

Menţionăm că termenul liber şi constant din partea stîngă a ecuaţiei torsiunii a fost omis deoarece nu aduce contribuţii la soluţia vibratorie. Deplasările v, w şi φ au rămas în formă dimensională pentru a facilita satisfacerea condiţiilor la limită.

Tabelul 1

Parametrii adimensionali

	Baleiaj	Bătaie	Torsiune
Viteză de rotaţie	$\alpha_v = \dfrac{ml^4\Omega^2}{EI_v}$	$\alpha_w = \dfrac{ml^4\Omega^2}{EI_w}$	$\alpha_\varphi = \dfrac{ml^4\Omega^2}{GJ}$
Pulsaţia	$\lambda_v = \dfrac{ml^4\omega^2}{EI_v}$	$\lambda_w = \dfrac{ml^4\omega^2}{EI_w}$	$\lambda_\varphi = \dfrac{ml^4\omega^2}{GJ}$
Inerţie	$\mu_v = k_v^2/l^2$	$\mu_w = k_w^2/l^2$	$\mu_A = k_A^2/l^2$, $\mu = \mu_v + \mu_w$ $\mu_{vw} = \mu_v - \mu_w$
Flexibilitate la forfecare	$\delta_v = \dfrac{EI_v}{Gk_1 A l^2}$	$\delta_w = \dfrac{EI_w}{Gk_2 A l^2}$	
Coordonata şi forţă axială	$\xi = \dfrac{x}{l}$	$\tau(\xi) = T(x)/m\,\Omega^2 l^2$	

Din examinarea ecuaţiilor (2) rezultă că vibraţia de torsiune (2c) este independentă (decuplată) de cea de încovoiere (2a), (2b) şi de aceea poate fi considerată separat [3]. De aceea în continuare ne vom focaliza atenţia numai asupra vibraţiilor de încovoiere descrise de ecuaţiile (2a) şi (2b).

Se observă că termenii de cuplaj între vibraţiile de încovoiere (baleiaj şi bătaie) sînt proporţionali cu produsul $\sin\theta \cos\theta$ (termenii subliniaţi).

În poziţiile extreme ale palei ($\theta = 0^\circ$ şi $\theta = 90^\circ$) cuplajul între vibraţia de baleiaj şi cea de bătaie este nul, iar în poziţiile intermediare $0^\circ < \theta < 90^\circ$ el ia o valoare ce nu depăşeşte 0,5.

Pentru a putea rezolva ecuaţiile de vibraţii cuplate la $\theta \neq 0$ cu ajutorul metodelor şi programelor de calcul dezvoltate anterior [3] pentru vibraţii decuplate la $\theta = 0$, vom apela în continuare la reprezentarea palei torsionate printr-un număr de segmente drepte avînd între ele discontinuitate de unghi de pas corespunzătoare torsiunii incrementale (fig. 2). Segmentele au proprietăţi diferite, astfel încît cu această metodă se modelează şi neuniformitatea palei.

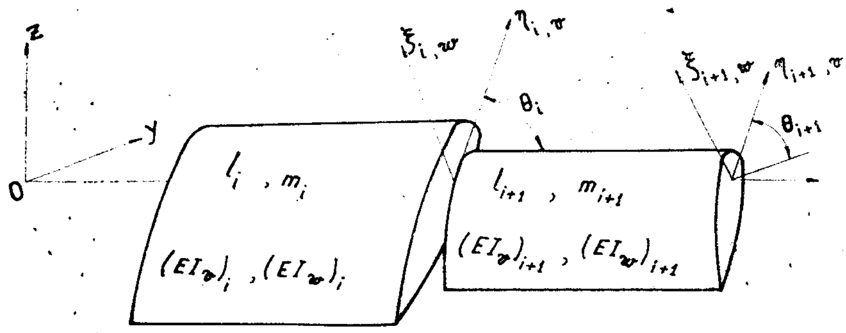

Fig. 2

Reamintind că deplasările v şi w sînt definite în lungul axelor principale de inerţie locale, rezultă că, de la un segment la altul, deplasările v şi w se transformă prin rotire şi se amalgamează, corectîndu-se astfel, de fiecare dată, efectul torsiunii local neglijate. Pe aceste considerente apreciem de asemenea că putem neglija termenii de cuplaj ($\sin\theta\cos\theta$) din ecuaţiile (2a) şi (2b). În acest fel ecuaţiile (2a) şi (2b) se pot rezolva direct cu metodele şi programele de calcul deja dezvoltate pentru vibraţiile independente de baleiaj şi de bătaie.

METODA DE REZOLVARE A ECUAŢIILOR DIFERENŢIALE

Conform argumentaţiei prezentate anterior considerăm spre rezolvare sistemul:

$$v'''' - \alpha_v(\tau v')' - (\lambda_v + \alpha_v \cos^2\theta)\, v = 0, \tag{3a}$$

$$w'''' - \alpha_w(\tau w')' - (\lambda_w + \alpha_w \sin^2\theta)\, w = 0, \tag{3b}$$

în care, în scopul uşurării expunerii şi fără a pierde din generalitatea metodei, am neglijat deocamdată corecţiile Timoshenko ($v_b \approx v$, $w_b \approx w$, $\mu_v = \mu_w = 0$).

Aplicînd metoda semianalitică [3] considerăm soluţia de forma

$$X(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} A_n \xi^n. \tag{4}$$

Prin înlocuirea lui (4) în (3a), respectiv (3b), se obţin formulele de recurenţă pentru fiecare tip de vibraţie în parte rezultînd şi funcţiile de vibraţie $F_j(\xi)$, $j = 1, 2, 3, 4$, astfel că

$$v(\xi) = C_1^v F_1^v(\xi) + C_2^v F_2^v(\xi) + C_3^v F_3^v(\xi) + C_4^v F_4^v(\xi),$$

$$w(\xi) = C_1^w F_1^w(\xi) + C_2^w F_2^w(\xi) + C_3^w F_3^w(\xi) + C_4^w F_4^w(\xi),$$

cu menţiunea că la stabilirea funcţiilor F_i^v şi F_i^w se iau parametrii indexaţi cu v, respectiv w.

Constantele C_j^v, C_j^w nu sînt independente unele de altele, ci trebuie luate în ansamblu astfel încît condiţiile la limită sînt satisfăcute în mod cuplat.

Detalii asupra formulelor de recurenţă şi modului de construire a funcţiilor $F_j(\xi)$ au fost date anterior [1] şi de aceea nu vor mai fi repetate aici.

FOLOSIREA MATRICELOR DE TRANSFER PENTRU PALE NEUNIFORME ŞI TORSIONATE

S-a arătat într-o lucrare anterioară [3] că, pentru aplicarea metodei semianalitice la studiul palelor neuniforme, se poate face apel la metoda matricelor de transfer aplicată la o reprezentare segmentată a palei reale. Ecuaţiile diferenţiale se rezolvă astfel exact pe parcursul fiecărui segment, condiţiile de capăt (bilocale) transmiţîndu-se de la un segment la altul prin continuitatea vectorului de stare,

$$Z = \begin{Bmatrix} d \\ f \end{Bmatrix}, \tag{5}$$

unde d este vectorul deplasărilor generalizate, iar f cel al forţelor generalizate. În cazul de faţă, cînd considerăm mişcarea cuplată de baleiaj — bătaie a unei pale torsionate, mărimea vectorului Z se dublează faţă de cazul mişcărilor independente [3] astfel că

$$Z^T = \{v, w, v', w', M_v, M_w, S_v S_w\} \cdot \tag{6}$$

În interiorul segmentului indice i, vectorul de stare se exprimă sub forma

$$Z_i(\xi) = B_i(\xi)\, c_i, \tag{7}$$

unde $B_i(\xi)$ este o matrice ce conţine funcţiile F_j^v şi F_j^w $j = 1, \ldots, 4$ şi derivatele acestora (tabelul 2), iar c_i este vectorul constantelor (C_j^v) şi (C_j^w), $j = 1, \ldots, 4$ specifice fiecărui segment i în parte:

$$c_i = \{C_1^v,\ C_2^v,\ C_3^v,\ C_4^v,\ C_1^w,\ C_2^w,\ C_3^w,\ C_4^w\}^T. \tag{8}$$

Rezultă că, fiind dat vectorul c_i al constantelor specifice segmentului i, putem calcula vectorul de stare $Z_i(\xi)$ pentru orice punct al segmentului dînd lui ξ valori în intervalul [0, 1] şi evaluînd matricea $B_i(\xi)$, iar apoi pe $Z_i(\xi)$ folosind (7).

Tabelul 2

Matricea $B_i(\xi)$

$F_1^v(\xi)$	$F_2^v(\xi)$	$F_3^v(\xi)$	$F_4^v(\xi)$	0	0	0	0
0	0	0	0	$F_1^w(\xi)$	$F_2^w(\xi)$	$F_3^w(\xi)$	$F_4^w(\xi)$
$\frac{1}{l} F_1'^v(\xi)$	$\frac{1}{l} F_2'^v(\xi)$	$\frac{1}{l} F_3'^v(\xi)$	$\frac{1}{l} F_4'(\xi)$	0	0	0	0
0	0	0	0	$\frac{1}{l} F_1'^w(\xi)$	$\frac{1}{l} F_2'^x(\xi)$	$\frac{1}{l} F_3'^w(\xi)$	$\frac{1}{l} F_4'^w(\xi)$
$\frac{EI_v}{l^2} F_1''^v(\xi)$	$\frac{EI_v}{l^2} F_2''^v(\xi)$	$\frac{EI_v}{l^2} F_3''^v(\xi)$	$\frac{EI_v}{l^2} F_4''^v(\xi)$	0	0	0	0
0	0	0	0	$\frac{EI_w}{l^2} F_1''^w(\xi)$	$\frac{EI_w}{l^2} F_2''^w(\xi)$	$\frac{EI_w}{l^2} F_3''^w(\xi)$	$\frac{EI_w}{l^2} F_4''^w(\xi)$
$\frac{EI_v}{l^3} (\alpha_v \tau_v F_1'^v - F_1'''^v)$	$\frac{EI_v}{l^3} (\alpha_v \tau_v F_2'^v - F_2'''^v)$	$\frac{EI_v}{l^3} (\alpha_v \tau_v F_3'^v - F_3'''^v)$	$\frac{EI_v}{l^3} (\alpha_v \tau_v F_4'^v - F_4'''^v)$	0	0	0	0
	0	0	0	$\frac{EI_w}{l^3} (\alpha_w \tau_w F_1'^w - F_1'''^w)$	$\frac{EI_w}{l^3} (\alpha_w \tau_w F_2'^w = F_2'''^w)$	$\frac{EI_w}{l^3} (\alpha_w \tau_w F_3'^w - F_3'''^w)$	$\frac{EI_w}{l^3} (\alpha_w \tau_w F_4'^w - F_4'''^w)$

În particular, pentru $\xi = 0$, putem evalua pe $B_i(0)$ în mod analitic şi putem rezolva apoi sistemul liniar

$$B_i(0)\, c_i = Z_i(0) \tag{9}$$

pentru a afla vectorul c_i al constantelor în funcţie de valoarea $Z_i(0)$ a vectorului de stare la începutul segmentului astfel că

$$c_i = B_i^{-1}(0)\, Z_i(0) \tag{10}$$

şi deci

$$Z_i(\xi) = B_i(\xi)\, B_i^{-1}(0)\, Z_i(0). \tag{11}$$

Pentru primul segment ($i = 1$) valoarea vectorului de stare la $\xi = 0$ rezultă direct din condiţiile la limită, iar pentru următoarele segmente această valoare rezultă prin transfer din segmentul precedent.

În acest sens se presupune o reuniune de n segmente $(i = 1, \ldots, n)$ avînd $m = n + 1$ interfeţe ($n - 1$ între segmente şi 2 la capete). La fiecare interfaţă se efectuează o rotaţie de unghi $\Delta\,\theta_i$ $(i = 1, \ldots, n + 1)$.

Condiţiile la limită bilocale la $x = r_0$ şi $x = R$ sînt impuse prin intermediul vectorilor de stare extremali Z_0 şi, respectiv, Z_R. Transferul peste o interfaţă de rotaţii ΔQ_i se face cu matricea $T_i(\Delta\theta_i)$ dată de

$$T_i = \left[\begin{array}{c:c:c:c} \begin{matrix} C & S \\ -S & C \end{matrix} & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & \begin{matrix} C & S \\ -S & C \end{matrix} & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \begin{matrix} C & S \\ -S & C \end{matrix} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \begin{matrix} C & S \\ -S & C \end{matrix} \end{array}\right].$$

unde $c = \cos(\Delta\theta_i,$ $s = \sin(\Delta\,\theta_i)$.

Punînd $\xi = 1$ în (11), obţinem relaţia de transfer peste întreg segmentul i :

$$Z_i(1) = B_i(1)\, B_i^{-1}(0)\, Z_i(0), \tag{13}$$

în timp ce transferul de la un segment la următorul îl facem cu formula

$$Z_{i+1}(0) = T_{i+1}\, Z_i(1). \tag{14}$$

Apoi prin recurenţă, scriem :

$$Z_i(\xi) = B_i(\xi)\, B_i^{-1}(0) \left[\prod_{j=1}^{i-1} T_{j+1}\, B_j(1)\, B_j^{-1}(0)\right] Z_1(0). \tag{15}$$

Formula (15) ne permite să scriem vectorul de stare în orice punct în lungul palei cu condiţia cunoaşterii vectorului de stare la bază.

APLICAREA CONDIȚIILOR BILOCALE

Avînd în vedere că sistemul de ecuații diferențiale (3) este de ordinul 8 rezultă că la extremitățile palei se impun în total 8 condiții la limită. Considerînd caracterul bilocal al condițiilor la limită rezultă că, în principiu, nici unul din cei 2 vectori de stare extremali Z_0 și Z_R nu sînt complet definiți, acest aspect fiind o dificultate în plus în rezolvarea problemei.

Remarcînd că, din cele 16 elemente conținute în total în vectorii Z_0 și Z_R, 8 sînt cunoscute prin intermediul condițiilor bilocale, rezultă că alte 8 elemente sînt necunoscute urmînd a fi determinate prin rezolvarea problemei. Grupînd elementele necunoscute într-un vector σ, vom putea exprima apoi vectorii de stare la capete folosind vectorul necunoscut σ și condițiile la limită sub forma

$$Z_0 = A_0 \sigma\,; \quad Z_R = A_R\, \sigma\,. \tag{16}$$

Exemplu 1. *Pală articulată* avînd condițiile la limită date de

$$x = r_0,\ v_0 = w_0 = M_{vR} = M_{w_0} = 0,$$

$$x = R,\ M_{v_R} = M_{w_R} = S_{v_R} = S_{w_R} = 0\,.$$

Atunci

$$Z_0 = \begin{bmatrix} v_0 \\ w_0 \\ v_0' \\ w_0 \\ M_{v_0} \\ M_{w_0} \\ S_{v_0} \\ S_{w_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v_0'} \\ w_0' \\ S_{v_0} \\ S_{w_0} \\ v_R \\ w_R \\ v_R' \\ w_R' \end{bmatrix},$$

$$Z_R = \begin{bmatrix} v_R \\ w_R \\ v_R' \\ w_R' \\ M_{v_R} \\ M_{w_R} \\ S_{v_R} \\ S_{w_R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0' \\ w_0' \\ S_{v_0} \\ S_{w_0} \\ v_R \\ w_R \\ v_R' \\ w_R' \end{bmatrix}, \tag{17}$$

adică

$$\sigma = \{v_0', w_0', S_{v_0}, S_{w_0}, v_R, w_R, v_R', w_R'\}^T,$$

iar A_0 și A_R așa cum rezultă din (17).

STABILIREA ECUAȚIEI FRECVENȚELOR

Procedînd în continuare la aplicarea metodei matricelor de transfer scriem, la capetele palei,

$$Z_1(0) = T_1 Z_0 \,; \quad Z_R = T_{n+1} Z_n(1) \tag{18}$$

și atunci

$$Z_R = D\, Z_0 \,, \tag{19}$$

unde, folosind (15) și (18), avem

$$D = T_{n+1} \left(\prod_{i=1}^{n} B_i(1)\, B_i^{-1}(0)\; T_i \right). \tag{20}$$

Înlocuind (16) în (19), obținem ecuația necunoscutelor :

$$A_R \sigma = D A_0 \sigma \,, \tag{21}$$

care se poate rescrie sub forma sistemului omogen :

$$D^* (\omega) \sigma = 0, \tag{22}$$

unde

$$D^* (\omega) = D(\omega) A_0 - A_R \tag{23}$$

este o matrice ce depinde doar de frecvența de vibrație și de condițiile la limită.

Conform procedurii obișnuite, sistemul (22) admite soluții $\sigma \neq 0$ numai dacă determinantul său este nul, și de aceea putem stabili ecuația frecvențelor sub forma

$$|D^* (\omega)| = 0 \,. \tag{24}$$

Ecuația (24) este neliniară în ω și se rezolvă numeric cu ajutorul unor programe de calcul specializate [6], rezultatul fiind frecvențele proprii ω_k, $k = 1,2,\ldots N_\omega$ ale palei considerate, la o turație Ω prestabilită și la un unghi de pas θ_0 dat.

În cazul cînd se dorește studierea parametrică a variației frecvențelor proprii cu turația, la diferite unghiuri de pas, procedura de mai sus se va repeta corespunzător, obținîndu-se cîte un set de frecvențe ω_k pentru fiecare combinație (Ω, θ_0).

CALCULUL MODURILOR PROPRII

Pentru fiecare frecvență proprie ω_k, care anulează determinantul sistemului (23) ($|D^*(\omega_k)| = 0$) există o soluție nenulă σ_k a acestui sistem, soluție ce reprezintă vectorul propriu al sistemului. Acesta poate fi folosit la reconstituirea modului propriu de vibrație al palei la frecvența ω_k.

Avînd în vedere că sistemul (23) rămîne totuși cu un grad de nedeterminare chiar și pentru $\omega = \omega_k$, rezultă că numai 7 din cele 8 componente ale vectorului σ_k pot fi calculate în mod unic. În practică, noi punem de obicei $w_R = 1$ apoi rezolvăm sistemul redus aflînd astfel restul de 7 necunoscute.

În acest scop se construiește matricea D^{**} prin permutarea în termenul liber a coloanei corespunzătoare necunoscutei fixate ($\sigma_\sigma = w_R = 1$) și apoi eliminarea uneia din cele 8 linii cu 7 coloane rămase în partea stîngă (se va avea în vedere însă ca termenul liber rămas să fie în continuare nenul). Sistemul redus astfel obținut, de ordinul 7×7, este rezolvat aflîndu-se astfel vectorul necunoscutelor

$$\sigma^{**} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_7, \sigma_8\}^T, \tag{25}$$

O eficiență sporită se obține remarcînd că numai necunoscutele de la baza palei sînt necesare pentru construirea modului propriu și de aceea, în practică, partiționăm

$$\sigma^{**} = \{\sigma_0 \vdots \sigma_R^{**}\} \tag{26}$$

și apoi rezolvăm sistemul și mai redus (4×4) dat de ecuația :

$$D_{R_0}^{**}\,\sigma_0 = b. \tag{27}$$

Acest lucru va fi ilustrat în exemple.

După aflarea necunoscutelor de la baza palei conținute în vectorul σ_0 se trece la formarea vectorului Z_0 și apoi la evaluarea formei modale prin calculul vectorului de stare $Z_i(\xi)$ într-un număr de puncte plasate echidistant în cadrul fiecărui segment. În acest scop se folosește formula (15), unde $Z_1(0) = T_1 Z_0$.

Vectorul de stare astfel calculat este stocat împreună cu valoarea corespunzătoare a lui x, în vectorul formei modale, a_{mode}. După terminarea calculului în toate punctele alese, vectorul a_{mode} este compactat pentru eliminarea eventualelor puncte duble și apoi este reprezentat grafic la plotter.

De remarcat că vectorul propriu stocat în a_{mode} este calculat în raport cu coordonatele locale (axele principale) ale fiecărui segment. Acestea diferă de la segment la segment datorită torsiunii palei. În anumite situații prezintă interes și calculul formei modale raportată la triedrul rotoric, respectiv la planul de rotație și la normala la aceasta, Oz. În acest caz se calculează vectorul de stare raportat la triedrul global prin aplicarea rotației inverse :

$$\bar{Z}_i(\xi) = T(-\theta_i)Z_i(\xi), \tag{28}$$

unde $\bar{Z}_i(\xi)$ este vectorul de stare în triedrul global. Valorile lui $\bar{Z}_i(\xi)$ sînt stocate în modul propriu în coordonate globale, g_{mode}, și apoi procesate ca și cele din a_{mode}.

CAZUL PALEI ARTICULATE

Pentru exemplificarea metodei vom considera mai întîi cazul palei articulate avînd condiţiile la limită :

$$
\begin{aligned}
&x = r_0, \qquad v_0 = w_0 = M_{v_0} = M_{w_0} = 0,\\
&x = R, \quad M_{v_R} = M_{w_R} = S_{v_R} = S_{w_R} = 0,
\end{aligned}
\tag{29}
$$

pentru care matricele A_0 şi A_R au fost redate în (17).

Aplicînd condiţiile la limită asupra matricei produs D, se obţine sistemul omogen :

$$
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
D_{13} & D_{14} & D_{17} & D_{18} & -1 & & & \\
D_{23} & D_{2} & D_{27} & D_{2} & & -1 & & \\
D_{33} & D_{3} & D_{37} & D_{3} & & & -1 & \\
D_{43} & D_{4} & D_{47} & D_{48} & & & & 1 \\
\hline
D_{53} & D_{5} & D_{57} & D_{58} & & & & \\
D_{63} & D_{6} & D_{67} & D_{6} & & & 0 & \\
D_{73} & D_{7} & D_{77} & D_{7} & & & & \\
D_{83} & D_{8} & D_{87} & D_{88} & & & &
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_4\\ \hline \sigma_5\\ \sigma_6\\ \sigma_7\\ \sigma_8
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
0\\ 0\\ 0\\ 0\\ \hline 0\\ 0\\ 0\\ 0
\end{array}\right],
\tag{30}
$$

adică

$$
D^*(\omega)\sigma = 0,
\tag{31}
$$

unde D_{ij} sînt elemente ale matricei D.

Se observă că matricea $D^*(\omega)$ are o expresie aparte permiţînd partiţionarea sistemului sub forma :

$$
\begin{cases}
D^*_{00}\,\sigma_0 - \sigma_R = 0,\\
D^*_{R_0}\,\sigma_0 = 0.
\end{cases}
\tag{32}
$$

Rezultă că ecuaţia frecvenţelor $|D^*(\omega)| = 0$ avînd un determinant în principiu de 8×8, se reduce de fapt la un determinant de 4×4 :

$$
|D^*_{R_0}(\omega)| = 0,
\tag{33}
$$

unde

$$
D^*_{R_0}(\omega) =
\begin{bmatrix}
D_{53} & D_{54} & D_{57} & D_{58}\\
D_{63} & D_{64} & D_{67} & D_{68}\\
D_{73} & D_{74} & D_{77} & D_{78}\\
D_{83} & D_{84} & D_{87} & D_{88}
\end{bmatrix}.
\tag{34}
$$

Prin rezolvarea ecuaţiei frecvenţelor se obţin valorile proprii ω_k, $k = 1,2\ldots$

Pentru fiecare valoare ω_k se calculează vectorii proprii punînd $\sigma_6 = 1$ și rezolvînd, în principiu, sistemul liniar (7×7):

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} D_{13} & D_{14} & D_{17} & E_{18} & -1 & & \\ D_{33} & D_{34} & D_{37} & D_{38} & & -1 & \\ D_{43} & D_{44} & D_{47} & D_{48} & & & -1 \\ \hline D_{53} & D_{54} & D_{57} & D_{58} & & & \\ D_{63} & D_{64} & D_{67} & D_{68} & & & \\ D_{73} & D_{74} & D_{77} & D_{78} & & & \\ D_{23} & D_{24} & D_{27} & D_{28} & & & \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \hline \sigma_5 \\ \sigma_7 \\ \sigma_8 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right]. \quad (35)$$

Se observă din nou că gradul sistemului ce trebuie rezolvat efectiv pentru aflarea necunoscutelor la baza palei $\sigma_0 = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}^T$ este de numai 4×4, respectiv:

$$D^{**}_{R_0}\,\sigma_0 = b\,, \qquad (36)$$

unde

$$D^{**}_{R_0} = \begin{bmatrix} D_{53} & D_{54} & D_{57} & D_{58} \\ D_{63} & D_{64} & D_{67} & D_{68} \\ D_{73} & D_{74} & D_{77} & D_{78} \\ D_{23} & D_{24} & D_{27} & D_{28} \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad (37)$$

CAZUL PALEI ÎNCASTRATE

Al doilea exemplu considerat este cel al palei încastrate avînd condițiile la limită:

$$x = r_0,\ v_0 = w_0 = v_0' = w_0' = 0,$$

$$x = R,\ \ M_{vR} = M_{wR} = S_{vR} = S_{wR} = 0\,.$$

Vectorul necunoscutelor σ se alege sub forma:

$$\sigma = \{M_{v_0}, M_{w_0}, S_{v_0}, S_{w_0}, v_R, w_R, v_R', w_R'\}^T.$$

Matricele A_0 și A_R corespunzătoare sînt date de relațiile:

$$Z_0 = \begin{bmatrix} v_0 \\ w_0 \\ v_0' \\ w_0' \\ M_{v_0} \\ M_{w_0} \\ S_{v_0} \\ S_{w_0} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} M_{v_0} \\ M_{w_0} \\ S_{w_0} \\ S_{w_0} \\ \hline v_R \\ w_R \\ v_R' \\ w_R' \end{array}\right] = A_0\,\sigma,$$

$$
z_R = \begin{bmatrix} v_R \\ w_R \\ v_R' \\ w_R' \\ \hdashline M_{v_R} \\ M_{w_R} \\ S_{v_R} \\ S_{w_R} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc:cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} M_{v_0} \\ M_{w_0} \\ S_{v_0} \\ S_{w_0} \\ \hdashline v_R \\ w_R \\ v_R' \\ w_R' \end{bmatrix} = A_R\, \sigma.
$$

Drept urmare matricea $D^* = DA_0 - A_R$ ia forma :

$$
D^* = \left[\begin{array}{cccc:cccc} D_{15} & D_{16} & D_{17} & D_{18} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ D_{25} & D_{26} & D_{27} & D_{28} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ D_{35} & D_{36} & D_{37} & D_{38} & 0 & 0 & -1 & 0 \\ D_{45} & D_{46} & D_{47} & D_{48} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hdashline D_{55} & D_{56} & D_{57} & D_{58} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{65} & D_{66} & D_{67} & D_{68} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{75} & D_{76} & D_{77} & D_{78} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{85} & D_{86} & D_{87} & D_{88} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
$$

şi deci

$$
D^*_{R_0} = \begin{bmatrix} D_{55} & D_{56} & D_{57} & D_{58} \\ D_{65} & D_{66} & D_{67} & D_{68} \\ D_{75} & D_{76} & D_{77} & D_{78} \\ D_{85} & D_{86} & D_{87} & D_{88} \end{bmatrix}.
$$

Pentru calculul modurilor proprii se folosesc matricele :

$$
D^{**}_{R_0} = \begin{bmatrix} D_{55} & D_{56} & D_{57} & D_{58} \\ D_{65} & D_{66} & D_{67} & D_{68} \\ D_{75} & D_{76} & D_{77} & D_{78} \\ D_{25} & D_{26} & D_{27} & D_{28} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.
$$

Primit în redacţie la 15 august 1988

BIBLIOGRAFIE

1. A. R. S. BRAMWELL, *Helicopter Dynamics*, Arnold, London, 1976.
2. V. GIURGIUŢIU, *O metodă semianalitică pentru determinarea frecvenţelor şi modurilor proprii ale palelor de elicopter*, Bul. ing. şi teh. militari, 4 (1978).
3. V. GIURGIUŢIU; R. O. STAFFORD; *Semi-analytic Methods for Frequencies and Mode Shapes of Rotor Blades*, Vertica, 1 (1977).
4. V. GIURGIUŢIU, *Elemente de aeroelasticitatea elicopterului*—studiul palei, Edit. Tehnică, Bucureşti, 1983.
5. E. C. PESTEL; F. A. LECKIE; *Matrix Methods in Elastomechanics*, Mc. Graw Hill, 1963.
6. V. GIURGIUŢIU; P. KALMUŢCHI; *Noi rezultate în calculul vibraţiilor palelor de elicopter*, Simpozionul Academiei Militare, Bucureşti noiembrie, 1987.